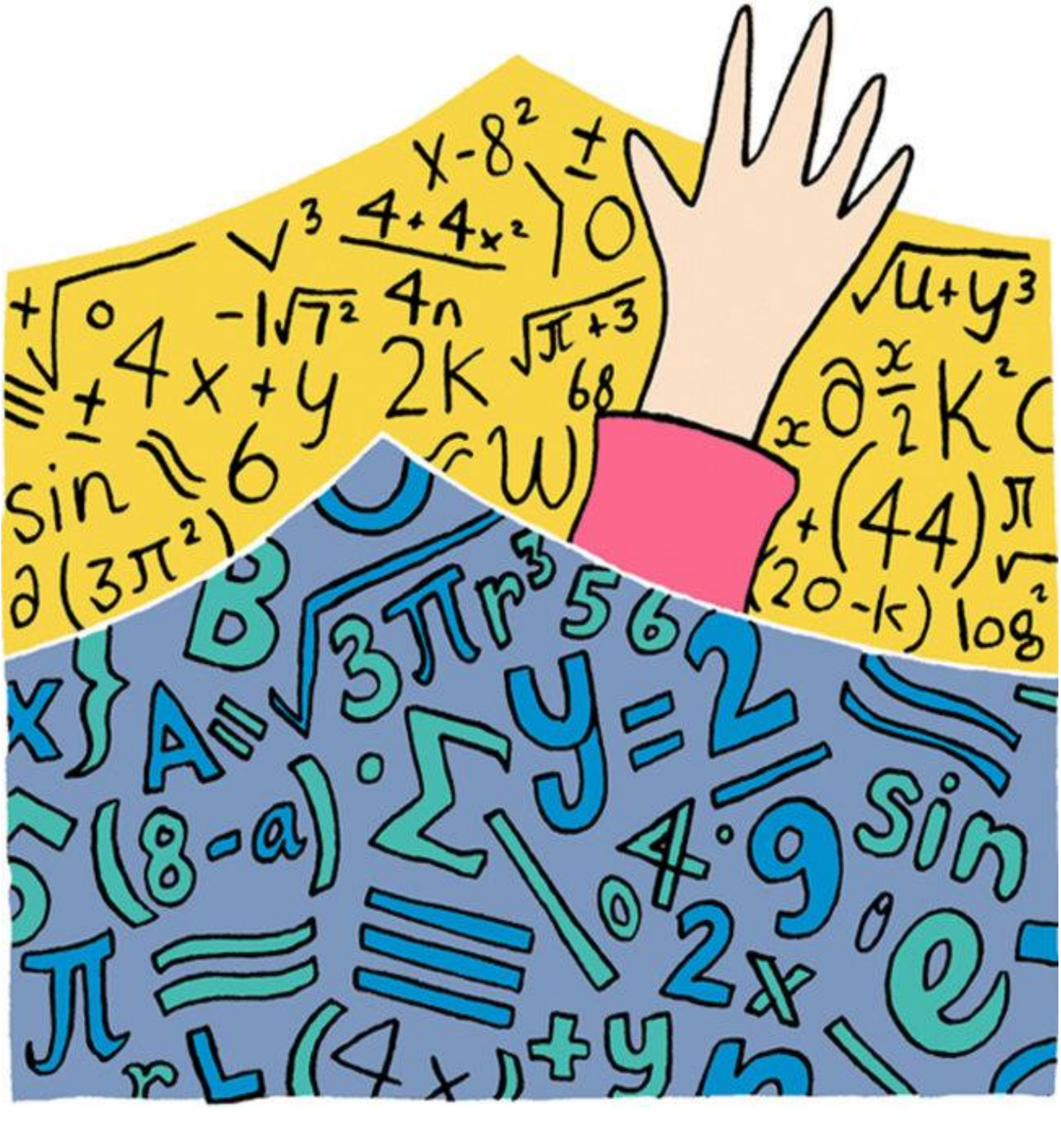
E-BOOK DI ALGEBRA

I NUMERI RELATIVI



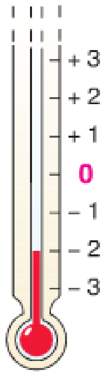
Realizzato da Rita Fazzello

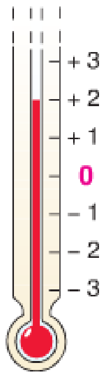
NUMERI RELATIVI

Situazioni pratiche e concrete, come misurazioni di temperatura, di profondità, di debiti ecc., hanno suggerito nel corso della storia della matematica l'introduzione dei **numeri relativi**. Il motivo principale per cui essi sono stati adottati è quello di rendere sempre possibile la sottrazione. Infatti nell'insieme **N** dei numeri naturali la sottrazione è possibile solo quando il minuendo è maggiore del sottraendo. Invece, vedremo che, nell'insieme dei numeri relativi diventa possibile qualsiasi sottrazione. L'attributo *relativi* deriva dal fatto che il loro valore dipende dalla posizione rispetto allo zero. Quelli minori di zero sono i **numeri negativi**, preceduti dal **segno –** (meno), quelli maggiori di zero sono i **numeri positivi**, preceduti dal **segno +** (più).

si legge "meno due"

temperatura = **– 2°** C





si legge "più due"

temperatura = **+ 2°** C

> Si chiamano **numeri relativi** lo zero e i numeri dotati di segno.
> I **numeri positivi** sono preceduti dal segno + e sono **maggiori di zero**.
> I **numeri negativi** sono preceduti dal segno – e sono **minori di zero**.

Esempio – 5 (numero negativo)
+ 3,8 (numero positivo)

Esempio mio

Valore assoluto

Il valore assoluto del numero – 4 è il numero 4 e il valore assoluto del numero + 4 è il numero 4.

> Si chiama **valore assoluto** (o modulo) di un **numero relativo** lo stesso numero **privato del segno** (+ o –).

Il valore assoluto di un numero si rappresenta scrivendo il numero tra due barrette verticali:

$|-4|$ si legge "valore assoluto (o modulo) di – 4" ed è uguale a 4.

Numeri relativi uguali, opposti, concordi e discordi

Si dicono **uguali** i numeri relativi che hanno lo **stesso segno** e lo **stesso valore assoluto**.
Si dicono **opposti** i numeri relativi che hanno lo stesso valore assoluto ma hanno **segno opposto**.
Si dicono **discordi** i numeri relativi di **segno opposto**.
Si dicono **concordi** i numeri che hanno lo **stesso segno**.

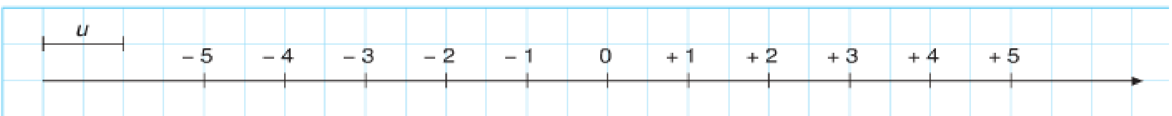
Esempio
- numeri uguali $-4{,}5$ e $-4{,}5$
- numeri discordi $-\frac{2}{3}$ e $+\frac{4}{5}$
- numeri opposti -5 e $+5$
- numeri concordi -5 e $-\frac{7}{2}$

Osserva che...

- Il **segno meno** (–) non indica l'operazione di sottrazione, segnala invece che il numero è minore di zero.
- Il **segno più** (+) non indica l'operazione di addizione, ma che il numero è maggiore di zero e si può omettere. Quando un numero non ha segno, si intende positivo: è indifferente scrivere + 8 oppure semplicemente 8.
- I **numeri opposti** si chiamano così perché si trovano da parti opposte rispetto allo zero e sono alla stessa distanza dallo zero. Quindi non bisogna confondere le due dizioni: **numeri opposti** (per esempio – 5 e + 5) e **numeri di segno opposto** (per esempio – 5 e + 3).

Rappresentazione grafica e confronto dei numeri relativi

Per rappresentare graficamente i numeri relativi, tracciamo una **retta** su cui stabiliamo un senso di orientamento da sinistra verso destra, detta **retta orientata**.
Al centro si segna un punto corrispondente al numero 0, che separa i numeri negativi (a sinistra) da quelli positivi (a destra). Fissata un'**unità grafica** si segnano, a intervalli congruenti all'unità grafica, una serie di punti a destra e a sinistra. Il numero + 1 si trova a destra, il numero – 1 a sinistra, entrambi alla distanza di 1 unità grafica da zero; il numero + 2 si trova a destra alla distanza di 2 unità grafiche dallo zero e così via. I punti che abbiamo considerato sono l'**immagine grafica** dei numeri relativi sulla retta orientata. La rappresentazione grafica dei numeri relativi richiede una retta, mentre per rappresentare i numeri assoluti è sufficiente una semiretta.
Per visualizzare i numeri relativi si usa rappresentarli su una retta orientata.
Se disponiamo su di essa una sequenza di numeri relativi:



risultano evidenti le seguenti proprietà:

- Ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo.

Esempio $+5 > -10$ **Esempio mio**

- Lo zero è maggiore di qualsiasi numero negativo e minore di qualsiasi numero positivo.

Esempio $0 > -8$ e $0 < +4$ **Esempio mio**

- Tra i numeri positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore.

Esempio $+3 > +2$ **Esempio mio**

- Tra i numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore.

Esempio $-4 > -8$ **Esempio mio**

…per approfondire….

Anteprima GLI INSIEMI DEI NUMERI RELATIVI E REALI

L'insieme dei *numeri naturali* preceduti dal segno + formano l'**insieme dei numeri interi positivi**, rappresentato dal simbolo $\mathbf{Z}^+$. Per convenzione il numero 0 è stato inserito nell'insieme $\mathbf{Z}^+$.

L'insieme dei *numeri naturali* preceduti dal segno – formano l'**insieme dei numeri interi negativi**, rappresentato dal simbolo $\mathbf{Z}^-$.

L'unione dei due precedenti insiemi costituisce l'**insieme dei numeri interi relativi**, rappresentato dal simbolo **Z**. Cioè $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}^+ \cup \mathbf{Z}^-$

L'insieme dei *numeri razionali* preceduti dal segno + e lo zero formano l'**insieme dei numeri razionali positivi**, rappresentato dal simbolo $\mathbf{Q}^+$.

L'insieme dei *numeri razionali* preceduti dal segno – formano l'**insieme dei numeri razionali negativi**, rappresentato dal simbolo $\mathbf{Q}^-$.

L'unione degli insiemi $\mathbf{Q}^+$ e $\mathbf{Q}^-$ costituisce l'**insieme dei numeri razionali relativi**, rappresentato dal simbolo **Q**. Cioè $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \mathbf{Q}^-$

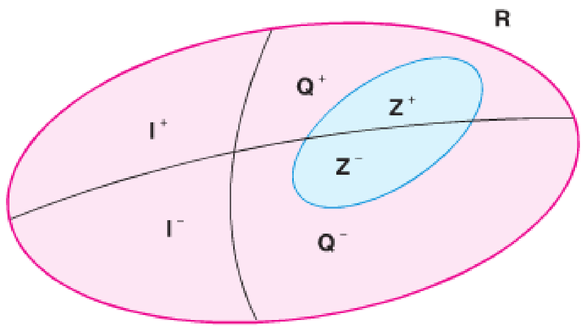
L'insieme dei *numeri irrazionali* preceduti dal segno + formano l'**insieme dei numeri irrazionali positivi**, rappresentato dal simbolo $\mathbf{I}^+$.

L'insieme dei *numeri irrazionali* preceduti dal segno – formano l'**insieme dei numeri irrazionali negativi**, rappresentato dal simbolo $\mathbf{I}^-$.

L'unione degli insiemi $\mathbf{I}^+$ e $\mathbf{I}^-$ costituisce l'**insieme dei numeri irrazionali relativi**, rappresentato dal simbolo **I**. Cioè $\mathbf{I} = \mathbf{I}^+ \cup \mathbf{I}^-$

L'unione di tutti i precedenti insiemi costituisce l'**insieme dei numeri reali relativi** (o semplicemente dei numeri reali), rappresentato dal simbolo **R**. Cioè $\mathbf{R} = \mathbf{Z} \cup \mathbf{Q} \cup \mathbf{I}$

Tutti questi insiemi sono rappresentati nel diagramma di Eulero-Venn.

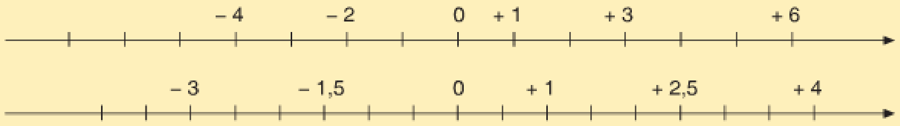


Applica

1 Scrivi i seguenti numeri relativi.

- due numeri concordi, ma non uguali
- due numeri discordi, ma non opposti
- due numeri uguali
- due numeri opposti

2 Scrivi i numeri mancanti sulle seguenti rette orientate.



3 Scrivi sui puntini i simboli >, = o < in modo che le relazioni siano corrette.

$+7 \dots\dots -15$ $\qquad \frac{5}{3} \dots\dots -\frac{4}{7}$ $\qquad -9 \dots\dots -4$ $\qquad -2 \dots\dots -\frac{18}{9}$

ADDIZIONE DI NUMERI RELATIVI

Il segno + (più) è il simbolo dell'addizione ed è lo stesso simbolo scelto per indicare i numeri positivi. Per evitare confusione fra i due diversi significati che esso assume, metteremo fra parentesi, per il momento, i numeri relativi che desideriamo addizionare. Per esempio, la scrittura:

$$(+4) + (-3)$$

indica che si intende eseguire l'addizione del numero + 4 con il numero – 3.
Per facilitare la comprensione e la memorizzazione delle regole di addizione, immaginiamo che i numeri positivi indichino i *crediti*, cioè il denaro che si deve ricevere da una persona, mentre i numeri negativi i *debiti*.

Consideriamo ora quattro casi.

1. L'operazione: $(+5) + (+2)$
indica l'addizione di due crediti. Il risultato è un credito (perciò un numero positivo) dato dalla somma dei due importi, cioè: $(+5) + (+2) = +7$

La regola algebrica che se ne deduce è:

l'**addizione** di due **numeri positivi** è uguale a un **numero positivo** il cui valore assoluto è la somma dei valori assoluti dei due addendi.

Esempio $(+3) + (+7) = +10$

Esempio mio

2. L'operazione: $(-5) + (-2)$

indica l'addizione di due debiti. Il risultato è un debito (perciò un numero negativo) dato dalla somma dei due importi, cioè:

$$(-5) + (-2) = -7$$

La regola algebrica che se ne deduce è:

l'**addizione** di due **numeri negativi** è uguale a un **numero negativo** il cui valore assoluto è la somma dei valori assoluti dei due addendi.

Esempio (– 3) + (– 7) = – 10

Esempio mio

3. L'operazione: (+ 5) + (– 2)
indica l'addizione di un credito e di un debito. Essendo il credito maggiore (in valore assoluto) del debito, il risultato è un credito (perciò un numero positivo) dato dalla differenza dei due importi. Dunque, in questo caso, per eseguire l'addizione algebrica occorre eseguire una sottrazione:

(+ 5) + (– 2) = + 3

4. L'operazione: (– 5) + (+ 2)

è sempre l'addizione di un credito con un debito; però questa volta, al contrario del caso precedente, il debito è di importo superiore al credito; il risultato, pertanto, è un debito (perciò un numero negativo). L'entità del debito è data ancora, come nel caso precedente, dalla differenza dei due importi. Anche in questo caso l'addizione algebrica si esegue facendo una sottrazione:

(– 5) + (+ 2) = – 3

La regola algebrica che si deduce dal terzo e dal quarto caso è:

l'**addizione** di un **numero positivo** con un **numero negativo** dà un numero il cui **segno** è identico a quello dell'**addendo** con il valore assoluto **maggiore** e il cui valore assoluto è dato dalla **differenza** tra i valori assoluti dei due **addendi**.

Esempio (– 3) + (+ 7) = + 4
(+ 3) + (– 7) = – 4

Esempio mio

Tutti i casi possibili di addizione algebrica si possano ricondurre a uno dei quattro casi appena esposti. A questo punto possiamo formulare la regola generale che riassume tutti i casi precedenti.

- La **somma** di due **numeri** relativi **concordi** è un numero relativo il cui segno è lo stesso di quello dei due addendi e il cui valore assoluto è la somma dei due valori assoluti.
- La **somma** di due **numeri** relativi **discordi** è un numero relativo che ha lo stesso segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore e il cui valore assoluto è la differenza dei due valori assoluti.

Esempio $(+2) + (+3) = +5 \qquad (-6) + (-2) = -8$
$(+4) + (-1) = +3 \qquad (-8) + (+2) = -6$

Esempio mio

Osserva che...

- La somma di due numeri relativi opposti è zero.

Esempio $(+9) + (-9) = 0$ **Esempio mio**

- La somma di un numero relativo con lo zero è uguale al numero stesso.

Esempio $(-12) + 0 = -12$ **Esempio mio**

Addizione di tre o più addendi

L'addizione di tre o più numeri relativi si esegue allo stesso modo che con i numeri naturali, cioè si addizionano i primi due, al risultato si aggiunge il terzo e così di seguito.

Esempio
$$(+5) + (+8) + (-16) + (+4) + (-7) =$$
$$= (+13) + (-16) + (+4) + (-7) =$$
$$= (-3) + (+4) + (-7) =$$
$$= (+1) + (-7) = -6$$

Esempio mio

Addizione di frazioni

Le regole sono le stesse di quelle che valgono per i numeri razionali assoluti.

Esempio
$$\left(+\frac{7}{3}\right) + \left(+\frac{5}{6}\right) = \frac{(+7 \cdot 2) + (+5)}{6} = \frac{(+14) + (+5)}{6} = +\frac{19}{6}$$
$$\left(-\frac{2}{15}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{(-2) + (-2 \cdot 3)}{15} = \frac{(-2) + (-6)}{15} = -\frac{8}{15}$$
$$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{(+3 \cdot 5) + (-7 \cdot 2)}{20} = \frac{(+15) + (-14)}{20} = +\frac{1}{20}$$
$$\left(+\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{7}{10}\right) + \left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{(+3 \cdot 5) + (-7 \cdot 2) + (-2 \cdot 4)}{20} =$$
$$= \frac{(+15) + (-14) + (-8)}{20} = \frac{(+1) + (-8)}{20} = -\frac{7}{20}$$

Applica

Esegui le addizioni.

1 $(+9)+(+15)$ $\quad (-4)+(+7)$ $\quad (+3)+(-4)$

$(+4)+(+6)$ $\quad (+9)+(-4)$ $\quad (-7)+(-12)$

2 $(+8{,}7)+(+2{,}6)$ $\quad (-3{,}9)+(+8{,}4)$ $\quad (+2{,}1)+(-8)$

$(+6)+(+5{,}4)$ $\quad (+2{,}2)+(-5{,}9)$ $\quad (-0{,}8)+(-5{,}2)$

3 $\left(+\frac{8}{5}\right)+\left(+\frac{2}{3}\right)$ $\quad \left(-\frac{3}{7}\right)+\left(+\frac{5}{14}\right)$ $\quad \left(+\frac{2}{5}\right)+(-8)$ $\quad \left[+\frac{34}{15};\ -\frac{1}{14};\ -\frac{38}{5}\right]$

4 $\left(+\frac{6}{5}\right)+\left(+\frac{5}{4}\right)$ $\quad \left(+\frac{2}{9}\right)+\left(-\frac{5}{3}\right)$ $\quad \left(-\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{5}{2}\right)$ $\quad \left[+\frac{49}{20};\ -\frac{13}{9};\ -\frac{21}{8}\right]$

5 $\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{5}{2}\right)+\left(-\frac{2}{3}\right)$ $\quad \left(+\frac{2}{5}\right)+\left(-\frac{1}{7}\right)+(-2)$ $\quad \left[+\frac{13}{12};\ -\frac{61}{35}\right]$

6 $\left(-\frac{1}{2}\right)+(-3)+\left(+\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{7}{8}\right)$ $\quad \left[-\frac{15}{8}\right]$

SOTTRAZIONE DI NUMERI RELATIVI

In aritmetica abbiamo visto che la sottrazione è l'operazione inversa dell'addizione: il risultato di una sottrazione è quel numero che addizionato al sottraendo dà il minuendo. Anche per i numeri relativi vale lo stesso concetto.

La **differenza** di due **numeri relativi**, dati in un certo ordine, è quel numero relativo che si deve addizionare al secondo per ottenere il primo.

$(+3)-(+7)=-4$ perché $(-4)+(+7)=+3$

$(+3)-(-2)=+5$ perché $(+5)+(-2)=+3$

Si può osservare che si ottengono gli stessi risultati se **si addiziona al primo termine della sottrazione l'opposto del secondo**.

$(+3)-(-2)=(+3)+(+2)=+5 \qquad (+3)-(+7)=(+3)+(-7)=-4$

Perciò al posto di una sottrazione si può eseguire un'addizione, a patto che il secondo addendo sia l'opposto del sottraendo. Si può dunque enunciare la regola:

la **differenza** di due numeri relativi è **uguale** alla **somma** del **primo** termine e dell'**opposto** del **secondo**.

Esempio $(-8)-(-10)=(-8)+(+10)=+2$

$(-2{,}5)-(+0{,}5)=(-2{,}5)+(-0{,}5)=-3$

$$\left(-\frac{5}{3}\right)-\left(-\frac{2}{5}\right)=\left(-\frac{5}{3}\right)+\left(+\frac{2}{5}\right)=\frac{(-5\cdot 5)+(+2\cdot 3)}{15}=\frac{(-25)+(+6)}{15}=-\frac{19}{15}$$

ADDIZIONE ALGEBRICA

Si dice **addizione algebrica** una sequenza di addizioni e sottrazioni di numeri relativi e **somma algebrica** il suo risultato.

La seguente espressione è dunque un'addizione algebrica:

$$(+8) - (-3) + (-2) - (+15) + (+13)$$

La regola della sottrazione (addizionare l'opposto del sottraendo) ci permette di trasformare la precedente espressione in un'altra, in cui l'unico segno di operazione che compare è il segno +:

$$(+8) + (+3) + (-2) + (-15) + (+13)$$

A questo punto si può usare una scrittura semplificata, scrivendo gli addendi uno dopo l'altro, ciascuno con il proprio segno, tralasciando le parentesi e i segni + dell'addizione:

$$+8 + 3 - 2 - 15 + 13$$

Se il primo addendo è positivo, spesso si tralascia anche il primo segno +. Il calcolo si esegue così:

$$8 + 3 - 2 - 15 + 13 =$$
$$= 11 - 2 - 15 + 13 =$$
$$= 9 - 15 + 13 =$$
$$= -6 + 13 = 7$$

questi passaggi possono essere eseguiti mentalmente

Calcolo rapido

Applicando le proprietà dell'addizione talvolta è possibile rendere più semplici i calcoli.

Consideriamo, per esempio, la seguente addizione algebrica:

$$-16 + 14 - 12 - 13 + 5 + 7 - 1 - 14 + 6$$

Gli addendi opposti (quelli in blu) si possono eliminare (per la proprietà associativa), poiché $+14 - 14 = 0$. Quindi l'addizione diventa:

$$-16 - 12 - 13 + 5 + 7 - 1 + 6$$

Grazie alla proprietà commutativa possiamo cambiare l'ordine dei termini, per esempio scrivendo prima tutti i termini negativi e poi quelli positivi:

$$-16 - 12 - 13 - 1 + 5 + 7 + 6$$

Per la proprietà associativa li possiamo raggruppare così:

$$(-16 - 12 - 13 - 1) + (5 + 7 + 6)$$

e possiamo sostituire a essi i loro risultati:

$$-42 + 18 = -24$$

Quanto è stato detto permette di formulare la seguente regola di **calcolo mentale rapido**:

Per calcolare la **somma algebrica** di più numeri relativi, prima si eliminano i termini opposti, poi si addizionano separatamente gli addendi positivi e quelli negativi e, infine, si addizionano i due risultati ottenuti.

Esempio $-12 + 3 - \cancel{4} + 2 + 7 - 5 + \cancel{4} - 8$

$= -25 + 12$

$= -13$

Si esegue l'addizione dei termini negativi (quelli sottolineati con una lineetta) e, separatamente, quella dei termini positivi (sottolineati con un archetto)

Espressioni con addizioni di numeri relativi

Le espressioni con i numeri relativi si risolvono applicando le regole già note dall'aritmetica.

Esempio $8 - \{3 + 6 + (5 - 8) - [15 - 7 + 2 - (-14 - 7 + 9)] + 3\} =$

Risolviamo le parentesi tonde $= 8 - \{3 + 6 - 3 - [15 - 7 + 2 + 12] + 3\} =$

Risolviamo la parentesi quadra $= 8 - \{3 + 6 - \cancel{3} - 22 + \cancel{3}\} =$

Risolviamo la parentesi graffa $= 8 + 13 =$

$= 21$

Applica

Calcola le somme algebriche.

1 $+5 + 3 - 6$ $\qquad +4 + 10 + 5 - 8$

2 $7 + 14 + 3 - 21 - 12 - 9 + 4 - 14 + 12$ [− 16]

3 $3{,}8 + 2{,}5 + 0{,}01 + 3{,}8 - 4 + 4 + 1{,}1 - 2{,}5$ [+ 8,71]

4 $8{,}5 + 3{,}2 - 4 - 6{,}2 + 9 - 11{,}5$ [− 1]

5 $-\frac{1}{3} + \frac{7}{12} - \frac{5}{4}$ [− 1]

6 $+\frac{5}{2} - \frac{7}{6} + \frac{3}{4}$ $\left[+\frac{25}{12}\right]$

7 $\frac{4}{3} - 2 + 7 + 2 - \frac{5}{2} - \frac{4}{3} - 4 - \frac{1}{2}$ [0]

8 Calcola il valore dell'espressione.

$5 - 9 - \{[6 - (-8 + 2) - 15] + 24 - (12 + 6)\}$ [− 7]

MOLTIPLICAZIONE DI NUMERI RELATIVI

Così come l'addizione algebrica gode delle stesse proprietà dell'addizione con i numeri razionali assoluti, anche per la moltiplicazione tra numeri relativi, ed è possibile dimostrarlo, valgono le stesse proprietà della moltiplicazione fra numeri razionali assoluti.

Il **prodotto di due numeri relativi** è un numero relativo il cui valore assoluto è il prodotto dei valori assoluti dei due fattori ed è:
- **positivo** se i due fattori sono **concordi**;
- **negativo** se i due fattori sono **discordi**.

Esempio $(+4) \cdot (+7) = +28$ $\quad (-4) \cdot (-7) = +28$
$(+4) \cdot (-7) = -28$ $\quad (-4) \cdot (+7) = -28$

Esempio mio

Quando si calcola un prodotto conviene quindi osservare subito il segno dei due numeri relativi e seguire questo schema:

i due fattori sono concordi?

→ nel risultato scriviamo + seguito dal prodotto dei valori assoluti dei fattori

→ nel risultato scriviamo – seguito dal prodotto dei valori assoluti dei fattori

La regola che stabilisce il segno del risultato della moltiplicazione è schematizzata nella tabella.

regola dei segni della moltiplicazione	
+ per + uguale +	$+ \cdot + = +$
– per – uguale +	$- \cdot - = +$
+ per – uguale –	$+ \cdot - = -$
– per + uguale –	$- \cdot + = -$

Osserva che...

Per semplificare la scrittura si usano le seguenti convenzioni:
- al posto di $(-6) \cdot (+7)$ si può scrivere $-6 \cdot (+7)$;
- al posto di $(-6) \cdot (+7)$ si può scrivere $-6 \cdot 7$ (solo se il secondo fattore è positivo);
- al posto di $-6 \cdot (+7)$ si può scrivere $-6(+7)$.

Naturalmente non si può scrivere -67 al posto di $-6 \cdot 7$.

Inoltre, bisogna prestare attenzione a non confondere addizioni e moltiplicazioni:

$(+5) + (+6)$
$+5 + 6$
← queste sono addizioni

$(+5) \cdot (+6)$
$5 \cdot (+6)$
$5(+6)$
← queste sono moltiplicazioni

I numeri 0 e 1 nella moltiplicazione

Se uno dei fattori è 0, il prodotto è uguale a 0.

Esempio $(-5) \cdot 0 = 0$ **Esempio mio**

Se in una moltiplicazione di due fattori, uno di essi è + 1, il prodotto è uguale all'altro fattore.

Esempio $(-6) \cdot (+1) = -6$ **Esempio mio**

Se in una moltiplicazione di due fattori, uno di essi è – 1, il prodotto è uguale all'opposto dell'altro fattore.

Esempio $(-5) \cdot (-1) = +5$ **Esempio mio**

Proprietà della moltiplicazione

La moltiplicazione di numeri relativi gode delle stesse proprietà delle operazioni dei numeri razionali assoluti.

Proprietà commutativa. Il prodotto non cambia cambiando l'ordine dei fattori.

Esempio $(-4) \cdot (+2) = -8$
$(+2) \cdot (-4) = -8$
Esempio mio

Proprietà associativa. Il prodotto non cambia sostituendo a due o più fattori il loro prodotto.

Esempio $(-6) \cdot (+2) \cdot (-4) = +48$
$(-6) \cdot (-8) = +48$
Esempio mio

Proprietà dissociativa. Il prodotto non cambia se a un fattore se ne sostituiscono due o più aventi per prodotto il fattore sostituito.

Esempio $(-6) \cdot (-8) = +48$
$(-6) \cdot (-2) \cdot (+4) = +48$
Esempio mio

Proprietà distributiva. Il prodotto di un numero per un'addizione algebrica è uguale alla somma dei prodotti del numero per ciascun addendo dell'addizione.

Esempio $(-5) \cdot (-6 + 2) = (-5) \cdot (-6) + (-5) \cdot (+2)$

il reciproco di un numero relativo……

Un **numero** e il suo **reciproco** hanno lo **stesso segno** e il valore assoluto si ottiene:

- se è una frazione, scambiando fra loro denominatore e numeratore;
- se è un numero intero, scrivendo una frazione con numeratore 1 e denominatore il numero stesso.

Esempio Il reciproco di $-\frac{2}{9}$ è $-\frac{9}{2}$

Il reciproco di -4 è $-\frac{1}{4}$

Espressioni con somme e prodotti

Per risolvere le espressioni algebriche contenenti somme e prodotti si seguono le regole valide per i numeri razionali assoluti.

Esempio $5+\{(8-\underbrace{5\cdot 3}) - [(30+\underbrace{4\cdot 2})-58]\}\cdot(-2)=$

$=5+\{\underbrace{(8-15)}-[\underbrace{(30+8)}-58]\}\cdot(-2)=$

$=5+\{-7-[38-58]\}\cdot(-2)=$

$=5+\{-7+20\}\cdot(-2)=$

$=5+13\cdot(-2)=$

$=5-26=-21$

Applica

Esegui le moltiplicazioni.

1 $(+14)\cdot(+5)$ $\qquad$ $(-23)\cdot(-10)$

2 $(-12)\cdot(+5)$ $\qquad$ $(+4)\cdot(-11)$

3 $(-7)\cdot(+0{,}5)$ $\qquad$ $(-0{,}2)\cdot(-6{,}8)$

4 $(+1{,}5)\cdot(+2)$ $\qquad$ $(+9{,}5)\cdot(-0{,}1)$

5 $\left(-\frac{3}{4}\right)\cdot\left(-\frac{2}{9}\right)$ $\qquad$ $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(+\frac{8}{3}\right)$

6 $(+2)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)$ $\qquad$ $\left(+\frac{3}{8}\right)\cdot\left(+\frac{10}{21}\right)$

7 $(-3)\cdot(+6)\cdot(-8)$ $\qquad$ $(-2{,}5)\cdot(-10)\cdot(-5)$

8 $\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)\cdot\left(-\frac{3}{7}\right)$ $\qquad$ $\left(-\frac{7}{3}\right)\cdot\left(+\frac{15}{14}\right)\cdot\left(-\frac{8}{25}\right)$ $\qquad$ $\left[-\frac{15}{56};\ +\frac{4}{5}\right]$

9 $\left(-\frac{2}{7}\right)\cdot\left(-\frac{14}{15}\right)\cdot\left(+\frac{5}{8}\right)$ $\qquad$ $(-5)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$ $\qquad$ $\left[+\frac{1}{6};\ +1\right]$

Esegui le operazioni (addizioni e moltiplicazioni).

10 $-2\cdot(-4)$ $\qquad$ $+3+8$

11 $+3\cdot(+8)$ $\qquad$ $4-7$

12 $-3\cdot(-5)-7$ $\qquad$ $-8-(+7)-3$

Risolvi le espressioni.

13 $\left[\left(-\frac{1}{2}+1\right)\cdot\left(-\frac{1}{4}+2\right)-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\cdot(-2)-\left(-\frac{3}{4}+1\right)\cdot\left(-1+\frac{1}{2}\right)$ $\qquad$ $\left[-\frac{25}{8}\right]$

DIVISIONE DI NUMERI RELATIVI

Anche nel caso dei numeri relativi, la **divisione** è definita come **operazione inversa della moltiplicazione**.

Il **quoziente di due numeri relativi**, di cui il secondo diverso da zero, è il numero relativo che moltiplicato per il divisore dà il dividendo.

Esempio

Poiché $(+5)(+2) = +10$	allora	$(+10) : (+2) = +5$
Poiché $(-5)(+2) = -10$	allora	$(-10) : (+2) = -5$
Poiché $(+5)(-2) = -10$	allora	$(-10) : (-2) = +5$
Poiché $(-5)(-2) = +10$	allora	$(+10) : (-2) = -5$

Perciò anche per la divisione **vale la regola dei segni** vista per la moltiplicazione.

Il quoziente di due numeri relativi è il numero relativo che ha come modulo il **quoziente dei moduli** e:
- **segno positivo** se dividendo e divisore sono **concordi**;
- **segno negativo** se dividendo e divisore sono **discordi**.

Esempi $(-20) : (-4) = +5$
$(-6) : (+2) = -3$

Esempio mio

Divisione di frazioni

Come abbiamo già visto per i numeri razionali assoluti, anche con i numeri razionali relativi vale la regola seguente:

la divisione si esegue moltiplicando il dividendo per il reciproco del divisore.

Esempio $\left(-\frac{4}{3}\right) : \left(-\frac{5}{7}\right) = -\frac{4}{3} \cdot \left(-\frac{7}{5}\right) = +\frac{28}{15}$

Esempio mio

Espressioni con somme, prodotti e quozienti

Anche per la risoluzione delle espressioni algebriche contenenti somme, prodotti e quozienti valgono le regole già incontrate con i numeri razionali assoluti.

Esempio

$$4 + 5 \cdot 6 : 2 - (10 - 18 : 2 \cdot 3) =$$
$$= 4 + 5 \cdot 6 : 2 - (10 - 9 \cdot 3) =$$
$$= 4 + 5 \cdot 6 : 2 - (10 - 27) =$$
$$= 4 + 5 \cdot 6 : 2 + 17 =$$
$$= 4 + 30 : 2 + 17 =$$
$$= 4 + 15 + 17 = 36$$

Osserva che...

- Per calcolare il **segno di una frazione** composta da due numeri relativi, si applica la regola dei segni. Di seguito sono riportati quattro esempi che riassumono tutti i casi possibili.

Esempi $\frac{+5}{+2} = +\frac{5}{2}$ $\quad \frac{-7}{+2} = -\frac{7}{2}$ $\quad \frac{+5}{-9} = -\frac{5}{9}$ $\quad \frac{-8}{-11} = +\frac{8}{11}$

- Se il **divisore è zero** e il dividendo è diverso da zero, l'operazione è **impossibile**.

Esempio $(+2) : 0$ impossibile perché qualsiasi numero moltiplicato per zero dà zero

- Se **dividendo e divisore** sono **nulli**, l'operazione è **indeterminata**, cioè qualsiasi numero può essere il risultato.

Esempio $0 : 0 = 3$ perché $3 \cdot 0 = 0$
ma anche $0 : 0 = -2$ perché $-2 \cdot 0 = 0$ e così via.

- Se il **dividendo** è **zero**, il quoziente è sempre **zero**, qualunque sia il divisore.

Esempio $0 : (-5) = 0$ perché $0 \cdot (-5) = 0$
oppure $0 : (+2) = 0$ perché $0 \cdot (+2) = 0$ e così via.

- Se **dividendo e divisore** sono **uguali**, il quoziente è uguale a **+ 1**.
- Se **dividendo e divisore** sono **opposti**, il quoziente è uguale a **– 1**.
- Se il **divisore** è uguale a **+ 1**, allora il quoziente è **uguale al dividendo**.
- Se il divisore è uguale a **– 1**, allora il quoziente è uguale all'**opposto del dividendo**.
- Poiché la divisione può essere trasformata in una moltiplicazione, l**e sue proprietà sono le stesse di quelle della moltiplicazione**.

Applica

Esegui le divisioni.

1 $(-24) : (+8)$ $\qquad (-15) : (-7)$ $\qquad \left(-\frac{30}{77}\right) : \left(-\frac{5}{11}\right)$

2 $\left(+\frac{12}{5}\right) : \left(-\frac{1}{2}\right)$ $\qquad \left(-\frac{4}{5}\right) : (+6)$ $\qquad (+4) : \left(\frac{6}{13}\right)$

Risolvi le espressioni.

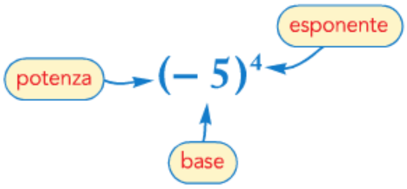
3 $\left[\left(\frac{7}{20} - \frac{3}{10}\right) : \left(-\frac{1}{5}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{1}{4}\right) : \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)\right] : \left(1 - \frac{1}{10}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$ $\qquad \left[+\frac{1}{4}\right]$

4 $\left[\left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) : \left(-\frac{11}{2}\right) + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) : \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] : \left[\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2}\right]$ $\qquad \left[\frac{8}{7}\right]$

POTENZE DI NUMERI RELATIVI

La definizione di potenza di un numero relativo è analoga a quella data in aritmetica.

La **potenza di un numero relativo** è il prodotto di tanti fattori uguali a quel numero quanti ne indica l'esponente.



Esempio $(-5)^4 = (-5)(-5)(-5)(-5)$ **Esempio mio**

Calcolo della potenza

Il **valore assoluto** della potenza si ottiene calcolando la potenza del **valore assoluto della base**.

Per quanto riguarda il segno, valgono le seguenti considerazioni.

- Se la **base** è **positiva** anche il risultato è sempre **positivo**, perché il prodotto di numeri positivi è sempre positivo.

  Esempio $(+3)^4 = (+3)(+3)(+3)(+3) = +81$

  Esempio mio

- Se la **base** è **negativa** e l'**esponente è pari**, il risultato è **positivo**; infatti il prodotto di più fattori è positivo se i fattori negativi sono pari.

  Esempio $(-2)^4 = (-2)(-2)(-2)(-2) = +16$

  Esempio mio

- Se la **base** è **negativa** e l'**esponente è dispari**, il risultato è **negativo**; infatti il prodotto di più fattori è negativo se i fattori negativi sono dispari.

  Esempio $(-2)^3 = (-2)(-2)(-2) = -8$ **Esempio mio**

La **potenza** di un **numero relativo** è un numero relativo il cui valore assoluto è la **potenza** del valore assoluto della **base** e il cui **segno** è **sempre positivo tranne** nel caso che la **base** sia **negativa** e l'**esponente dispari**.

Potenze di 0 e di 1

- Se l'**esponente** è **0**, la potenza è uguale a **+ 1**.

Esempi $(+2)^0 = +1$ $(-3)^0 = +1$ **Esempio mio**

- Se la **base** è **0** e l'esponente diverso da 0, la potenza è uguale a **0**.

Esempio $0^4 = 0$ **Esempio mio**

- La potenza 0^0 non ha significato.
- Se l'**esponente** è **1**, la potenza è **uguale alla base**.

Esempio $(-8)^1 = -8$ **Esempio mio**

- Se la **base** è **+ 1**, la potenza è uguale a **+ 1**.

Esempio $(+1)^3 = +1$ **Esempio mio**

- Se la **base** è **− 1**, la potenza è uguale a **+ 1** se l'**esponente** è **pari**, è uguale a **− 1** se l'**esponente** è **dispari**.

Esempi $(-1)^4 = +1$ $(-1)^3 = -1$ **Esempio mio**

Osserva che...

Le **proprietà delle potenze** dei numeri relativi sono le stesse viste per i numeri razionali assoluti.

- $(-2)^2 \cdot (-2) \cdot (-2)^3 = (-2)^{2+1+3} = (-2)^6 = +64$ → prodotto di potenze con la stessa base
- $(-3)^5 : (-3)^3 = (-3)^{5-3} = (-3)^2 = +9$ → quoziente di potenze con la stessa base
- $[(-2)^2]^3 = (-2)^{2 \cdot 3} = (-2)^6 = +64$ → potenza di potenza
- $(-2)^3 \cdot (+5)^3 = [(-2) \cdot (+5)]^3 = (-10)^3 = -1000$ → prodotto di potenze con lo stesso esponente
- $(-12)^3 : (+6)^3 = [(-12) : (+6)]^3 = (-2)^3 = -8$ → quoziente di potenze con lo stesso esponente

Potenze con esponente negativo

Le potenze possono avere esponenti negativi.
Per esempio, consideriamo la potenza 2^{-4}. Per capire che cosa significhi questa scrittura, consideriamo la divisione:

A $2^3 : 2^7$

Applicando la proprietà del quoziente di due potenze otteniamo:

B $2^3 : 2^7 = 2^{3-7} = 2^{-4}$

La divisione **A** si può scrivere anche sotto forma di frazione:

C $$2^3 : 2^7 = \frac{2^3}{2^7} = \frac{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2}}{\cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2^4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

Le scritture **B** e **C** sono uguali perché quozienti della stessa divisione: $2^{-4} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$

Si può notare che $\frac{1}{2}$ è il reciproco di 2, quindi, dalla precedente relazione si può desumere che una potenza negativa è uguale alla potenza positiva del reciproco e viceversa una potenza positiva è uguale alla potenza negativa del reciproco.

Un numero relativo diverso da zero elevato a **potenza con esponente negativo** è **uguale** al suo **reciproco** elevato alla potenza **con esponente opposto**.

In formula: $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

Esempi $\left(+\frac{3}{4}\right)^{-5} = \left(+\frac{4}{3}\right)^5$ $\quad$ $\left(+\frac{2}{5}\right)^{+7} = \left(+\frac{5}{2}\right)^{-7}$ $\quad$ $10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2$

Esempio mio

Notazione scientifica

Le **potenze di 10 con esponente negativo** si possono trasformare in frazioni e in numeri decimali.

Esempi

$$10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$10^{-2} = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100} = 0{,}01$$

$$10^{-3} = \left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1000} = 0{,}001$$

il numero delle cifre decimali è uguale al modulo dell'esponente

Le potenze negative di 10 sono utilizzate nelle discipline scientifiche per indicare misure di grandezze molto piccole.
Per esempio, le dimensioni atomiche e le lunghezze d'onda delle radiazioni elettromagnetiche si misurano in ångström (simbolo Å), unità di misura corrispondente a un decimiliardesimo di metro, ossia a 0,0000000001 m; questa relazione si esprime con le potenze scrivendo semplicemente:

$$1 \text{ Å} = 10^{-10} \text{ m}$$

Nella **notazione scientifica** il numero è scritto come **prodotto di una potenza di 10** (con esponente positivo o negativo) **per un numero decimale** (la **mantissa**) in cui la parte intera è costituita da una sola cifra diversa da zero.

Esempio Il numero **0,000 001 2** si scrive in notazione scientifica $1{,}2 \cdot 10^{-6}$.

Infatti: $1{,}2 \cdot 10^{-6} = 1{,}2 \cdot \frac{1}{1000000} = 1{,}2 : 1000000 = 0{,}0000012$

Ordine di grandezza

Come abbiamo già visto in Aritmetica, l'**ordine di grandezza** di un numero è la potenza di 10 più vicina al numero stesso. Ciò vale anche per numeri molto piccoli, vicini allo 0 e rappresentabili in notazione scientifica con esponenti negativi. Per esempio il numero 0,004 ha ordine di grandezza 10^{-3}; infatti è compreso tra 0,001 e 0,01 ed è più vicino a 0,001, cioè a 10^{-3}.
Per stabilire l'ordine di grandezza di un numero:

1. si scrive il numero in notazione scientifica;
2. se la mantissa è minore di 5, l'ordine di grandezza è la potenza di 10 del numero scritto in notazione scientifica;
3. se la mantissa è maggiore o uguale a 5, l'ordine di grandezza è la potenza di 10 con esponente aumentato di una unità.

Esempi $0{,}000035 = 3{,}5 \cdot 10^{-5} \rightarrow 10^{-5} \rightarrow$ *ordine di grandezza*
$0{,}000064 = 6{,}4 \cdot 10^{-5} \rightarrow 10^{-5+1} \rightarrow 10^{-4} \rightarrow$ *ordine di grandezza*

Applica

Calcola le potenze:

1 $(-5)^2$ $\quad -5^2$ $\quad (-5)^3$ $\quad (+12)^1$ $\quad (-7)^1$ $\quad (-1)^7$

2 $-\dfrac{3^2}{5}$ $\quad \left(+\dfrac{1}{3}\right)^4$ $\quad \left(-\dfrac{3}{5}\right)^2$ $\quad \left(-\dfrac{1}{3}\right)^4$ $\quad +\dfrac{4^3}{5}$ $\quad \left(+\dfrac{4}{5}\right)^3$

Esegui le operazioni conservando il risultato sotto forma di potenza.

3 $(-5)^7 \cdot (-5)^4 \cdot (-5)^5$ $\quad (-7)^{25} : (-7)^{12}$ $\quad (-3)^{18} : (-3)^5 : (-3)^6$

4 $(+2)^3 \cdot (+2) \cdot (+2)^8 \cdot (+2)^2$ $\quad \left(+\dfrac{4}{11}\right)^{20} : \left(+\dfrac{4}{11}\right)^{15}$ $\quad [(-4)^5]^8$

5 Trasforma le potenze in quelle equivalenti con esponente positivo.

$(+3)^{-1}$ $\quad \left(-\dfrac{4}{7}\right)^{-1}$ $\quad (+15)^{-2}$ $\quad (-6)^{-5}$ $\quad \left(\dfrac{1}{4}\right)^{-3}$ $\quad \left(+\dfrac{3}{5}\right)^{-4}$

6 Scrivi i numeri in notazione scientifica.

0,0816 $\quad$ 0,00059 $\quad$ 0,00000004

7 Trasforma la notazione scientifica in scrittura decimale.

$3{,}81 \cdot 10^{-4}$ $\quad 8 \cdot 10^{-2}$ $\quad 1{,}4 \cdot 10^{-6}$

RADICI QUADRATE. NUMERI IRRAZIONALI RELATIVI E NUMERI REALI

Estrazione di radice quadrata

Come abbiamo visto in aritmetica, l'estrazione di radice quadrata è l'operazione inversa dell'operazione di elevamento al quadrato.
Perciò, per estrarre la radice quadrata occorre trovare quei numeri relativi che elevati al quadrato danno il numero relativo di cui si vuole la radice quadrata.
Abbiamo scritto "quei numeri relativi" e non "quel numero relativo" perché, al contrario di quanto avviene in aritmetica, l'estrazione di radice quadrata di un numero relativo dà due soluzioni.

Infatti: $\sqrt{+36} = +6$ $\quad$ poiché $\quad (+6)^2 = +36$

$\sqrt{+36} = -6$ $\quad$ poiché $\quad (-6)^2 = +36$

Perciò le **radici quadrate di un numero positivo** sono sempre **due numeri opposti**.

Esempio $\sqrt{+81} = \begin{cases} +9 \\ -9 \end{cases}$ $\quad$ e si scrive $\quad \sqrt{+81} = \pm 9$

Osserva che...

Le radici quadrate dei numeri negativi non sono numeri reali, perché non esiste alcun numero reale (negativo o positivo) che moltiplicato per se stesso dia un prodotto negativo.

Esempio $\sqrt{-16} = ?$ Questa radice non è un numero reale, perché nessun numero reale elevato al quadrato dà – 16.

L'esigenza di rendere sempre possibile l'estrazione di radice quadrata ha portato a un'ulteriore estensione del concetto di numero, che include nuovi numeri caratterizzati dall'avere il proprio quadrato negativo: questi numeri vengono chiamati **numeri immaginari**.

Esempio $\sqrt{-16} =$ numero immaginario.

Applica

Calcola le radici quadrate. Quando non esistono soluzioni reali, scrivi *soluzione immaginaria.*

1 $\sqrt{+100}$ $\sqrt{+25}$ $\sqrt{-49}$

2 $\sqrt{+169}$ $\sqrt{+1}$ $\sqrt{+400}$

3 $\sqrt{+\frac{4}{49}}$ $\sqrt{\frac{121}{900}}$ $\sqrt{-\frac{9}{64}}$

4 $\sqrt{144}$ $\sqrt{-\frac{1}{16}}$ $\sqrt{\frac{1}{36}}$

5 $\sqrt{0{,}81}$ $\sqrt{-1{,}44}$ $\sqrt{+2{,}25}$

ESPRESSIONI NUMERICHE ALGEBRICHE

La regola generale di risoluzione delle espressioni algebriche è analoga a quella delle espressioni aritmetiche: si eseguono prima le operazioni nelle parentesi tonde, poi nelle quadre e poi nelle graffe, calcolando prima le potenze e le radici, poi eseguendo le moltiplicazioni e le divisioni (nell'ordine in cui compaiono) e lasciando per ultime le addizioni algebriche.

Esempio

$$\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt[3]{27}}{4}-\frac{1}{2}\right)+\left[\left(-1+2\cdot\frac{2}{7}\right):\left(-2+\frac{8}{7}\right)-\left(\frac{5}{2}-\frac{19}{2^3}-\frac{\sqrt[3]{125}}{4}\right)\right]\right\}:\left(-\frac{15}{8}\right)=$$

$$=\left\{\left(\frac{6-3-2}{4}\right)+\left[\left(-1+\frac{4}{7}\right):\left(\frac{-14+8}{7}\right)-\left(\frac{20-19-10}{8}\right)\right]\right\}:\left(-\frac{15}{8}\right)=$$

$$=\left\{\frac{1}{4}+\left[\left(-\frac{3}{7}\right):\left(-\frac{6}{7}\right)-\left(-\frac{9}{8}\right)\right]\right\}:\left(-\frac{15}{8}\right)=$$

$$=\left\{\frac{1}{4}+\left[+\frac{1}{2}+\frac{9}{8}\right]\right\}:\left(-\frac{15}{8}\right)=$$

$$=\left\{\frac{1}{4}+\frac{13}{8}\right\}:\left(-\frac{15}{8}\right)=$$

$$=\frac{15}{8}\cdot\left[-\frac{8}{15}\right]=-1$$

Applica

Risolvi le espressioni.

1 $\left[\left(\frac{5}{12}-\frac{3}{4}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{2}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{6}\right]:\left(-1+\frac{1}{2}\right)^3$ $\left[-\frac{4}{3}\right]$

2 $\left\{\left[-\frac{8}{3}-\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\right)\right]:\left(-\frac{41}{2}\right)-\frac{1}{30}\right\}:\left(-\frac{4}{5}\right)$ $\left[-\frac{1}{8}\right]$

3 $\left\{\left[\left(-\frac{5}{4}+\frac{3}{8}\right)-\frac{1}{2}\right]:\left(-\frac{11}{4}\right)+\left[-\frac{1}{2}:\left(-\frac{5}{4}\right):(-1)+\frac{1}{4}\right]\right\}:\left(-\frac{7}{5}\right)$ $\left[-\frac{1}{4}\right]$

4 $\left[\left(1-\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]-\left\{\left[-1\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right):\left(-\frac{1}{4}\right)+1\right]-\frac{1}{2}:\left(-\frac{4}{5}\right)\right\}$ $\left[-\frac{9}{8}\right]$

5 $\left(\frac{19}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\right)\cdot\left\{\left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt[3]{27}}{4}\right)-\frac{5}{8}:\left[\left(-1+\frac{1}{2}\right)^2:\left(1-\frac{6}{7}\right)+\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)\right]\right\}^2$ $\left[+\frac{5}{2}\right]$

PER IL RIPASSO…………

1 Parla dei numeri razionali relativi seguendo questa traccia:
- esprimi con esempi legati alla realtà l’esigenza di definire i numeri negativi;
- classifica i numeri relativi (opposti, concordi ecc.) a parole e con esempi;
- spiega come si rappresentano graficamente i numeri relativi.

2 Esponi le regole per effettuare il confronto tra numeri relativi.

3 Esponi le regole per eseguire l’addizione di numeri relativi e fai degli esempi.

4 Spiega in che modo la sottrazione si può trasformare in addizione algebrica.

5 Parla dei numeri reali relativi seguendo questa traccia:
- enuncia la definizione;
- definisci i numeri razionali e interi relativi e i loro collegamenti con i numeri razionali assoluti e i numeri naturali;
- parla dei numeri irrazionali relativi.

6 Esponi le regole per eseguire la moltiplicazione e la divisione di numeri relativi e fai degli esempi.

7 Parla delle potenze dei numeri relativi ed enuncia le loro proprietà.

8 Parla dell’estrazione di radice quadrata dei numeri relativi seguendo la traccia:
- definisci l’operazione;
- spiega le conseguenze dell’estrazione di radice quadrata agli effetti della generazione di insiemi di numeri.

9 Spiega a parole e con un esempio il significato dei seguenti termini: somma algebrica; valore assoluto; reciproco di un numero.

per PREPARARSI all'esame

1 Quale delle seguenti disuguaglianze è vera?

a $-\frac{17}{16}<-\frac{16}{17}$ **b** $+\frac{17}{16}<-\frac{16}{17}$ **c** $-\frac{17}{16}>+\frac{16}{17}$ **d** $+\frac{17}{16}<+\frac{16}{17}$

INVALSI, a.s. 2007/08

2 Le potenze $\left(-\frac{3}{4}\right)^2$ e $\left(+\frac{3}{4}\right)^2$ hanno lo stesso valore?

a No, la prima vale $-\frac{9}{16}$ e la seconda $+\frac{9}{16}$

b No, la prima vale $+\frac{9}{16}$ e la seconda $-\frac{9}{16}$

c Sì, la prima vale $-\frac{9}{16}$ e la seconda $-\frac{9}{16}$

d Sì, la prima vale $+\frac{9}{16}$ e la seconda $+\frac{9}{16}$

3 Qual è la soluzione della seguente espressione?

$$\frac{2}{3}+\frac{5}{9}-\left\{\frac{1}{5}+\left[\frac{4}{3}+\frac{11}{9}-\left(1-\frac{1}{5}\right)\right]\right\}+\frac{1}{15}$$

a -1 **b** $+\frac{3}{4}$ **c** $-\frac{2}{3}$ **d** $\frac{4}{3}$

IN SINTESI…

NUMERI RELATIVI

Si chiamano **numeri relativi** lo zero e i numeri dotati di segno. Essi si definiscono numeri positivi se sono preceduti dal segno + e numeri negativi se sono preceduti dal segno –.
I numeri relativi si rappresentano su una **retta orientata**.
Si definisce **valore assoluto** di un numero relativo lo stesso numero privato del segno.
Due numeri relativi sono **concordi** se hanno lo stesso segno, **discordi** se hanno segno opposto, **opposti** se hanno segno opposto e lo stesso valore assoluto.

$|+25| = 25$

$|-12| = 12$

CONFRONTO DI NUMERI RELATIVI

Ogni numero positivo è maggiore di ogni numero negativo. $+4 > -8$
Lo zero è maggiore di qualsiasi numero negativo e minore di qualsiasi numero positivo. $0 > -3$ $0 < +5$
Tra due numeri positivi è maggiore quello che ha valore assoluto maggiore. $+6 > +5$
Tra due numeri negativi è maggiore quello che ha valore assoluto minore. $-7 < -8$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

La **somma di due numeri relativi concordi** è un numero relativo che ha lo stesso segno e valore assoluto che è la somma dei due valori assoluti.

$(+3) + (+5) = +8$
$(-3) + (-5) = -8$

La **somma di due numeri relativi discordi** è un numero relativo che ha il segno dell'addendo che ha valore assoluto maggiore e valore assoluto pari alla differenza dei due valori assoluti.

$(+3) + (-5) = -2$
$(-3) + (+5) = +2$

Si dice **addizione algebrica** una sequenza di addizioni e sottrazioni di numeri relativi e **somma algebrica** il suo risultato.

$-8 + 5 - 4 - 2 = -9$

La **differenza** di due numeri relativi è uguale all'addizione tra il primo e l'opposto del secondo. Ciò porta a identificare la differenza con la somma algebrica.

$-6 - (-4) = -6 + (+4) = -2$

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

Il **prodotto** di due numeri relativi è un numero relativo il cui valore assoluto è il prodotto dei valori assoluti dei due fattori, e il segno è positivo se essi sono concordi, negativo se sono discordi.

$(+5) \cdot (+2) = +10$
$(-5) \cdot (-2) = +10$
$(+5) \cdot (-2) = -10$

Il **quoziente** di due numeri relativi è un numero relativo il cui modulo è il quoziente dei moduli, positivo se dividendo e divisore sono concordi, negativo se sono discordi.

$(-20) : (-4) = +5$

$$\left(-\frac{8}{3}\right) : \left(+\frac{5}{7}\right) = \left(-\frac{8}{3}\right) \cdot \left(+\frac{7}{5}\right) = -\frac{56}{15}$$

Regola dei segni	
Moltiplicazione	Divisione
$+ \cdot + = +$	$+ : + = +$
$- \cdot - = +$	$- : - = +$
$+ \cdot - = -$	$+ : - = -$

POTENZA

La **potenza** di un numero relativo è un numero relativo il cui valore assoluto è la potenza del valore assoluto della base e che ha segno negativo solo se la base è negativa e l'esponente è dispari.
L'elevamento a potenza di un numero relativo gode di proprietà analoghe a quelle dei numeri razionali assoluti.

$(-3)^4 = +81$
$(-3)^3 = -27$

Un numero diverso da zero elevato a potenza con esponente negativo è uguale al suo reciproco elevato alla potenza con esponente opposto al precedente esponente.

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$$

ovvero

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{+n}$$

NOTAZIONE SCIENTIFICA

Nella notazione scientifica il numero è scritto come prodotto di una potenza di 10 (con esponente positivo o negativo) per un numero decimale (la **mantissa**) in cui la parte intera è costituita da una sola cifra diversa da zero.

NOTAZIONE SCIENTIFICA	NOTAZIONE DECIMALE
$6{,}24 \cdot 10^4$	62400
$8{,}4 \cdot 10^{-5}$	0,000084

ORDINE DI GRANDEZZA

L'ordine di grandezza di un numero è la potenza di 10 più vicina al numero stesso.
Per stabilire l'ordine di grandezza di un numero:

1. si scrive il numero in notazione scientifica;
2. se la mantissa è minore di 5, l'ordine di grandezza è la potenza di 10;
3. se la mantissa è maggiore o uguale a 5, l'ordine di grandezza è la potenza di 10 con l'esponente aumentato di una unità.

$2{,}8 \cdot 10^{-9}$
ordine di grandezza $= 10^{-9}$
$6{,}8 \cdot 10^{-9}$
ordine di grandezza $= 10^{-8}$

RADICE QUADRATA

La **radice quadrata** di un numero relativo positivo ha **due soluzioni** (una positiva e una negativa).

$$\sqrt{+4} = \begin{cases} +2 \\ -2 \end{cases}$$

I **numeri irrazionali relativi** sono numeri irrazionali assoluti dotati di segno positivo o negativo.

$+\sqrt{2}$ $\qquad -\sqrt{2}$

I numeri razionali e i numeri irrazionali formano l'insieme **R** dei **numeri reali**.

$+2 \qquad -\dfrac{3}{2} \qquad +\sqrt{7}$

La radice quadrata di un numero relativo negativo dà luogo a un numero chiamato **numero immaginario**.

$\sqrt{-16}$ = numero immaginario

AllenaMENTE

pensiero razionale

Indovinello: qual è il colmo per un topo?

Per trovare la risposta

1. Disegna un circoletto intorno al numero più piccolo di ciascuna serie di numeri, come indicato nell'esempio.

Esempio $+3$ $+5$

-4	-7	
$-3{,}4$	$+0{,}5$	
$+9$	0	
$+\frac{4}{3}$	$-\frac{8}{9}$	
0	$-7{,}51$	
0	-3	$+2$
$+1$	0	-2
$+11$	$+10$	-9

-11	-8	-14
$-2{,}6$	$+2{,}6$	$+2{,}06$
$-3{,}4$	$-2{,}2$	$-5{,}2$
$-3{,}2$	$-2{,}4$	$-1{,}1$
$+4{,}5$	$+4{,}2$	$+4{,}27$
$+0{,}7$	$+0{,}586$	$+0{,}66$
$-0{,}3$	$-0{,}5$	$-\frac{1}{3}$
$-12{,}51$	$+0{,}84$	$-12{,}5$

2. Annulla, nella tabella che segue, tutte le lettere abbinate ai numeri che hai circolettato.
3. Leggi la risposta usando le lettere non cancellate.

– 2A	– 7B	+ 1C	0D	– 9E	+ 2A	– 5,3M	– N	– 3,2O	+ 6,2M	+ 10I
~~+ 3L~~	– 3Z	+ 4,2P	– 11N	+ 0,586R	+ 2A	– 4R	– 6,8E	– 12,51S	– 0,5A	– 3,4T
– 14U	+ 0,84G	– 2,4A	– 2,6F	– 5,2G	+ 0,7T	+ 4,5T	– 2,2O	– 7,51H	+ 2,06N	– 11

Labirinto di lettere

Passa su tutte le caselle una sola volta, da una all'altra, senza saltare, seguendo i numeri in ordine crescente. Scoprirai una massima di Kronecker, importante matematico del 1800.

partenza

D -15	I -10	Ò $-10{,}5$	R $-11{,}8$	R $0{,}05$	E $0{,}1$	M $12{,}5$	O $\frac{39}{3}$
N -9	I $-\frac{28}{2}$	E $-\frac{55}{5}$	C $-\frac{36}{3}$	L $0{,}01$	S $1{,}5$	O $\frac{23}{2}$	U $\frac{22}{2}$
U -8	M -6	O $-13{,}5$	R $-4{,}6$	I 0	È 3	T 2	L' $\frac{20}{2}$
R $-4{,}05$	U $-4{,}1$	E $-5{,}5$	I $-4{,}58$	O $-0{,}75$	O $5{,}8$	O $\frac{8}{3}$	L $\frac{18}{2}$
A $-4{,}01$	T $-4{,}16$	A $-4{,}48$	N $-4{,}5$	T $-0{,}8$	E $5{,}\overline{8}$	P $5{,}88$	E $8{,}6$
L -4	I, $-\frac{6}{2}$	T $-\frac{3}{2}$	U $-1{,}4$	T -1	R 6	A $6{,}5$	D $\frac{15}{2}$

arrivo